МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

И НЖЕНЕРНАЯ
и МАШИННАЯ
Г РАФИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

(лекция 5)

для спец. 1-25 01 07, 1- 26 02 03

МИНСК 2014

Лекция 5. Поверхности вращения.

Поверхности вращения – поверхности, образованные вращением линии (образующей) вокруг прямой (оси вращения).

При образовании поверхности вращения любая точка образующей описывает в пространстве окружность. Эти окружности называют *параллелями.* Плоскости параллелей всегда перпендикулярны к оси вращения. Параллель наименьшего диаметра называется *горлом*, а наибольшего – *экватором*. Линии пересечения поверхности вращения с плоскостью, проходящей через ось вращения, называются *меридианами.*

Если у поверхности вращения образующая – прямая линия, то получаем линейчатую поверхность вращения, например коническую, а если кривая, то нелинейчатую, например сферу.

Цилиндрическая поверхность вращения (рис. 5.1) – поверхность, образованная вращением прямолинейной образующей вокруг параллельной ей прямой – оси.

Коническая поверхность вращения (рис. 5.2) – поверхность, образованная вращением прямолинейной образующей вокруг пересекающейся с ней прямой – осью.

Сфера (рис. 5.3) – поверхность, образованная вращением окружности вокруг ее диаметра.

6.1. Точки и линии на поверхности вращения.

Для нахождения недостающей проекции точки, принадлежащей многограннику или кривой поверхности, необходимо построить какую-либо линию на заданной поверхности, проходящую через заданную проекцию точки, построить проекцию вспомогательной линии, а затем построить искомую проекцию точки. В качестве таких линий могут быть выбраны образующие, параллели, меридианы и др.

В ряде случаев, если поверхность тела проецирующая, т.е. перпендикулярна к одной из плоскостей проекций, отсутствующие на чертеже проекции точек могут быть найдены без дополнительных построений, так как поверхность обладает собирательным свойством.

Рассмотрим примеры построения точек, расположенных на пирамиде, призме, цилиндрической и конической поверхностях, а также сфере.

Условимся, что поверхность не имеет толщины, а точки и линии, лежащие на поверхности, не могут войти внутрь поверхности и выйти за ее пределы.

Поэтому все точки, расположенные на поверхностях призмы и цилиндра, на горизонтальной проекции поверхности распределяются по периметру основания (многогранника или окружности) с учетом их видимости. Видимая на фронтальной проекции часть поверхности расположена на горизонтальной плоскости ниже оси симметрии, невидимая – выше оси симметрии. С учетом видимости опускаем из проекций точек на фронтальной проекции линии связи до пересечения с линиями основания призмы или цилиндра на горизонтальной плоскости проекций.

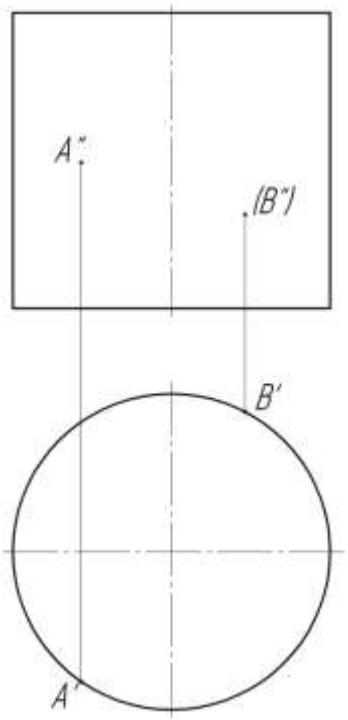

Рис. 5.1

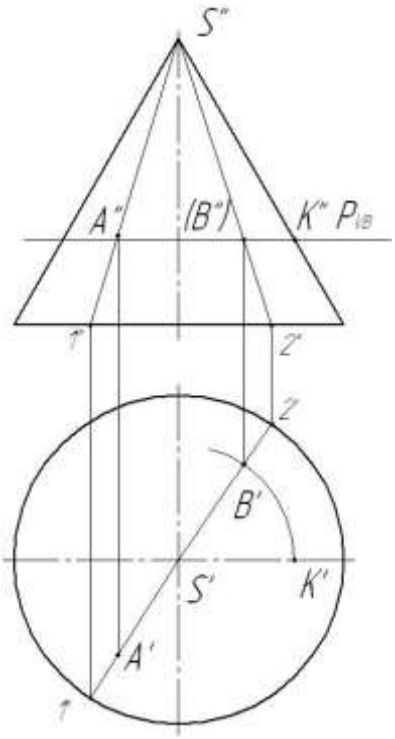

Рис. 5.2

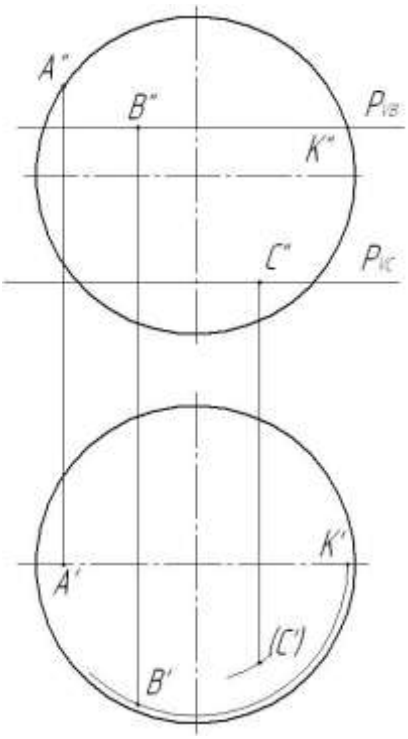

Рис. 5.3

При нахождении проекций точек, расположенных на поверхности цилиндра или конуса, необходимо пользоваться одним из рассмотренных ниже способов.

Способ образующих. Проводим из вершины конуса образующую через проекцию точки А″ до ее пересечения с основанием конуса на фронтальной проекции точки 1″ (рис. 5.2, 5.3). Затем с учетом видимости находим горизонтальную проекцию точки 1′ в месте пересечения линии связи с основанием конуса на горизонтальной проекции. Через проекции вершины S′ и точки 1′ проводим горизонтальную проекцию образующей S′1′. Из точки А″ опускаем линию проекционной связи до пересечения с линией S′1′. Точка пересечения А′ линии связи с проекцией образующей S′1′ и будет искомой точкой.

Способ плоскостей уровня. В зависимости от вида поверхности (конус – рис. 5.2 или сфера – рис. 5.3) в сечении образуется окружность. Проекция искомой точки лежит на окружности (учитывается фактор видимости точки).

Рассмотрим пример нахождения горизонтальной проекции точки В на двух перечисленных поверхностях.

При пересечении конуса (рис. 5.2) и сферы (рис. 5.3) плоскостями уровня в сечении образуются окружности. Радиус окружности равен расстоянию от оси конуса или сферы до точки пересечения плоскости с образующей (точка К). На горизонтальной проекции поверхностей указанным радиусом проводится дуга (вычерчивать всю окружность нет необходимости) выше или ниже горизонтальной оси (с учетом видимости точек). Из фронтальных проекций точки В″ проводятся вертикальные линии связи до пересечения с дугами. Точка пересечения дуги и линии связи и будет искомой проекцией В′. Невидимые проекции точек заключены в круглые скобки (В″ – на конусе, С′ – на сфере).

Прямые линии, проведенные на одной из проекций поверхности вращения, на других проекциях превращаются в кривые линии. Для их построения обычно

используются промежуточные точки (чем их больше, тем точнее будут построены проекции). Найденные проекции точек соединяются с помощью лекала плавными линиями.

5.2.Пересечение поверхностей вращения плоскостями частного положения.

Линия пересечения кривой поверхности плоскостью представляет собой плоскую кривую, которая может распадаться на прямые линии в случае пересечения плоскости с линейчатой поверхностью по ее образующим. Обычно построение этой линии производят по ее отдельным точкам.

Основным способом построения точек линии пересечения поверхности вращения с плоскостью является способ вспомогательных секущих плоскостей, пересекающих данную поверхность по некоторым линиям, которые должны быть графически простыми – прямыми или окружностями. Точки пересечения этих линий, являясь общими для поверхности вращения и секущей плоскости, будут точками искомой линии пересечения.

Так как линии пересечения каждой из вспомогательных секущих плоскостей с заданной поверхностью вращения и пересекающей ее плоскостью являются конкурирующими линиями, то построение точек линий пересечения поверхностей вращения с плоскостью производится теми же способами, которые используются при нахождении проекций точек и прямых линий на поверхности.

Пересечение цилиндрической поверхности плоскостью частного положения. Вид фигуры сечения цилиндрической поверхности плоскостью частного положения зависит от положения секущей плоскости.

При пересечении кругового цилиндра плоскостью частного положения в сечении могут получиться:

– ***окружность,*** если секущая плоскость перпендикулярна к оси цилиндра;

– ***эллипс,*** если секущая плоскость наклонена к оси цилиндра;

– ***прямоугольник,*** если секущая плоскость параллельна оси цилиндра.

Построение плоского сечения прямого кругового цилиндра аналогично построению плоского сечения призмы, поскольку прямой круговой цилиндр можно рассматривать как прямую призму с бесчисленным количеством ребер – образующих цилиндра. На рис. 6.4 приведены три проекции прямого кругового цилиндра, пересеченного фронтально проецирующей плоскостью *P*, заданной фронтальным следом. Из комплексного чертежа видно, что плоскость *P* пересекает не только боковую поверхность, но и верхнее основание цилиндра. Как известно, плоскость, расположенная под углом к оси цилиндра, пересекает его по эллипсу. Следовательно, фигура сечения в данном случае представляет собой часть эллипса. Фронтальная проекция фигуры сечения совпадает с фронтальным следом плоскости P_V. Горизонтальная проекция сечения совпадает с горизонтальной проекцией основания цилиндра.

Для построения профильной проекции сечения необходимо предварительно найти проекции его точек. Например, для нахождения горизонтальной проекции точки *6* проведем через ее фронтальную проекцию *6″* линию связи до пересечения с

горизонтальной проекцией окружности основания (точка $6'$). При помощи линий связи по двум имеющимся проекциям $6'$ и $6''$ находим профильную проекцию $6'''$. Полученные таким образом профильные проекции точек фигуры сечения соединяем кривой линией по лекалу.

Натуральную величину сечения определим способом перемены плоскостей проекций. Новую ось проекций x_1 проведем параллельно фронтальному следу P_V на произвольном расстоянии.

Из точек пересечения поверхности цилиндра с плоскостью ($1''$, $2'' \equiv 2_1''$, $3'' \equiv 3_1''$, $4'' \equiv 4_1''$, $5'' \equiv 5_1''$ и $6'' \equiv 6_1''$) проводим линии перпендикулярные к новой оси x_1 и откладываем от данной оси на этих линиях расстояния, равные расстоянию перечисленных точек сечения от оси x на горизонтальной проекции цилиндра (координата y).

Соединив найденные точки 1^{IV}, 2^{IV}, 3^{IV}, 4^{IV}, 5^{IV}, 6^{IV}, 6_1^{IV}, 5_1^{IV}, 4_1^{IV}, 3_1^{IV}, 2_1^{IV} по лекалу плавными линиями, получим натуральную величину сечения цилиндра плоскостью P.

Развертка поверхности цилиндра строится следующим образом: проводится горизонтальная линия (произвольно, но обеспечивая рациональное расположение чертежа с учетом пристроенного основания цилиндра и натуральной величины сечения), на которой из точки I_0 (рис. 6.5) откладывается 12 одинаковых отрезков, равных расстояниям (хордам) между точками деления (обозначены римскими цифрами), расположенными на окружности.

Из точек деления I_0, II_0, III_0 и т. д. проводят вертикальные линии, на которых откладываются расстояния от основания цилиндра до точек сечения $1''(1''')$, $2''(2''')$, $3''(3''')$ и т.д. Полученные точки 1_0, 2_0, 3_0, 4_0, 5_0 и 6_0, а также симметричные им точки 2_{10}, 3_{10}, 4_{10}, 5_{10} и 6_{10} соединяют с помощью лекала плавными линиями. Точки 6_0 и 6_{10} соединяют прямой линией. Основание цилиндра располагается на оси симметрии развертки и касается горизонтальной линии в точке VII_0. Натуральная величина сечения строится в верхней части развертки симметрично относительно ее оси.

Пересечение конической поверхности плоскостью частного положения. При различном положении секущей плоскости α по отношению к оси прямого кругового конуса получаются различные фигуры сечения:

– ***окружность,*** если секущая плоскость перпендикулярна к оси конуса;

– ***эллипс,*** если секущая плоскость наклонена к оси и пересекает образующие конуса;

– ***треугольник,*** если секущая плоскость проходит через вершину конуса;

– ***парабола,*** если секущая плоскость параллельна одной из образующих;

– ***гипербола,*** если секущая плоскость параллельна двум образующим.

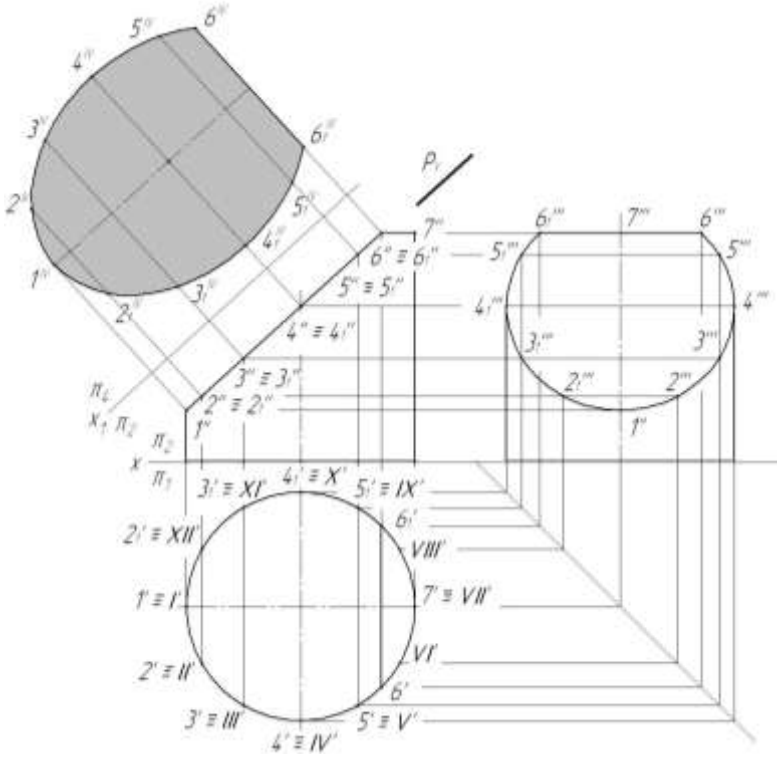

Рис. 5.4

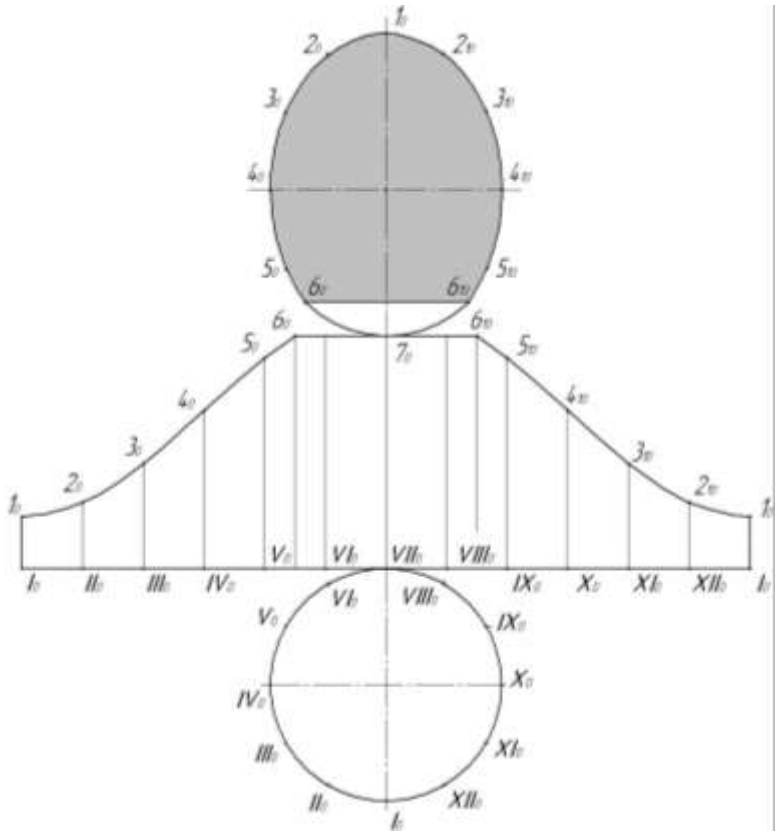

Рис. 5.5

Построение плоского сечения конуса аналогично построению сечения пирамиды, так как конус можно рассматривать как пирамиду с бесчисленным количеством ребер – образующих конуса (рис. 5.6).

Основание конуса на горизонтальной проекции (окружность) разделим на 12 равных частей и обозначим точки деления римскими цифрами (*I′*, *II′*, *III′* и т. д.). Соединим вершину конуса *S′* (центр окружности) и точки деления тонкими линиями. Из точек *I′*, *II′*, *III′*... проведем вертикальные линии связи до пересечения с основанием конуса на фронтальной проекции.

На рис. 5.6 показан порядок построения на примере точки *II′*. Вертикальная линия связи пересекает основание конуса на фронтальной проекции в точке *A″*. Соединим точку *A″* с проекцией вершины конуса *S″*. Линия *A″S″* пересечет след плоскости P_V, а следовательно и фронтальную проекцию сечения конуса, в точке *2″*. Подобные построения выполняются для всех остальных точек деления. Из полученных фронтальных проекций точек *1″*, *2″*, *3″*… проводим вертикальные линии связи до пересечения с одноименными линиями *I′S′*, *II′S′*, *III′S′*… и находим горизонтальные проекции точек сечения конуса *1′*, *2′*, *3′*… Соединим полученные точки плавной линией. Профильные проекции точек сечения находятся по линиям проекционной связи.

Натуральную величину сечения найдем, используя способ замены плоскостей проекций. Плоскость проекций π_1 заменяем плоскостью π_4, которая проводится параллельно фронтальному следу P_V,а значит и сечению конуса, и образует с плоскостью π_2 ось x_1. Из точек $1''$, $2'' \equiv 2_1''$, $3'' \equiv 3_1''$, $4'' \equiv 4_1''$… проводим линии, перпендикулярные оси x_1. На расстоянии, равном расстоянию от оси *x* до горизонтальной оси основания конуса на его горизонтальной проекции (координата *y*), проводим линию, параллельную оси x_1 (ось симметрии натурального сечения). Переносим с горизонтальной проекции расстояния от оси симметрии до точек $2'$ ($2_1'$), $3'$ ($3_1'$) и $4'$ ($4_1'$)… на ось x_1. Находим точки 1^{IV}, 2^{IV}, 3^{IV}, 4^{IV}… и симметричные им точки 2_1^{IV}, 3_1^{IV}, 4_1^{IV}… Соединив найденные точки, находим натуральную величину сечения.

Развертку поверхности конуса (рис. 5.7) строим следующим образом. Проводим осевую линию и выбираем на ней произвольную точку S_0. Из точки S_0 радиусом, равным длине образующей конуса, проводим дугу.

Угол развертки α можно определить по формуле:

$$\alpha = \pi d/L,$$

где *d* – диаметр основания конуса;

L – натуральная длина образующей конуса.

С целью упрощения построение развертки осуществляем следующим образом. Из точки VII_0 пересечения дуги с осевой линией отложим вправо и влево по шесть отрезков, равных расстоянию между двумя соседними точками (*I′II′*, *II′III′* и т. д., рис. 5.6), и обозначим эти точки. Соединим полученные точки I_0, II_0, III_0… тонкими линиями с точкой S_0.

Для нахождения точки 1_0 откладываем на линиях S_0I_0 отрезок, равный длине образующей от основания конуса до проекции точки *1″* на фронтальной проекции.

Для нахождения натуральных длин образующих до точек *2″*, *3″*, *4″*… переносим эти точки по горизонтальным линиям проекционной связи на образующую, имеющую натуральную величину (на рис. 5.6 – левая образующая на профильной проекции конуса), с последующим переносом этих величин на развертку.

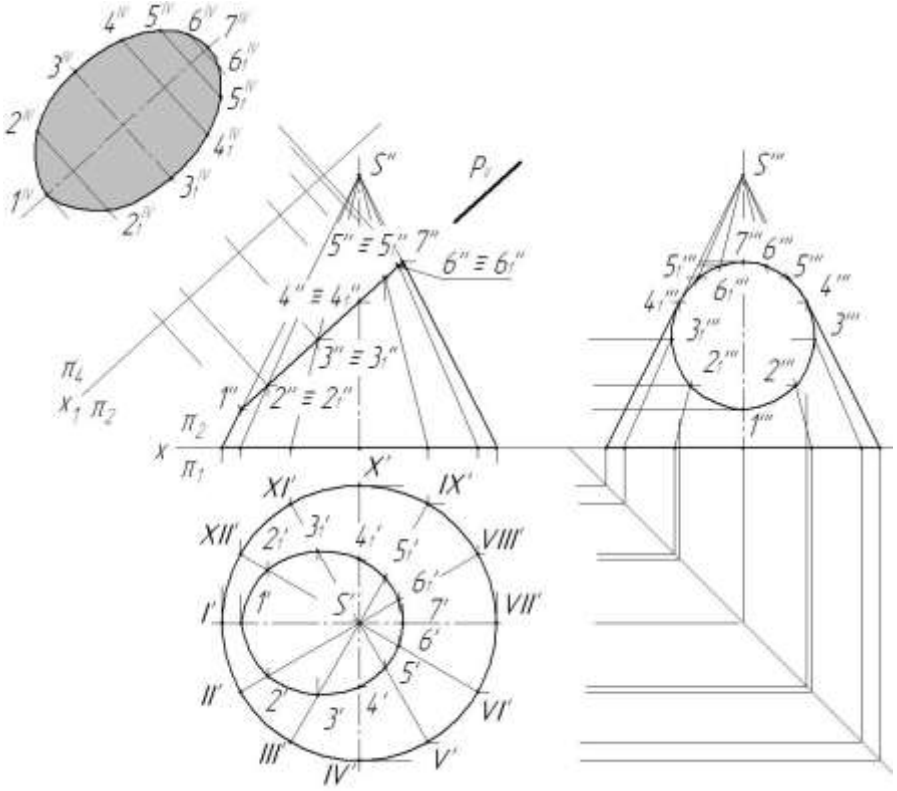

Рис. 5.6

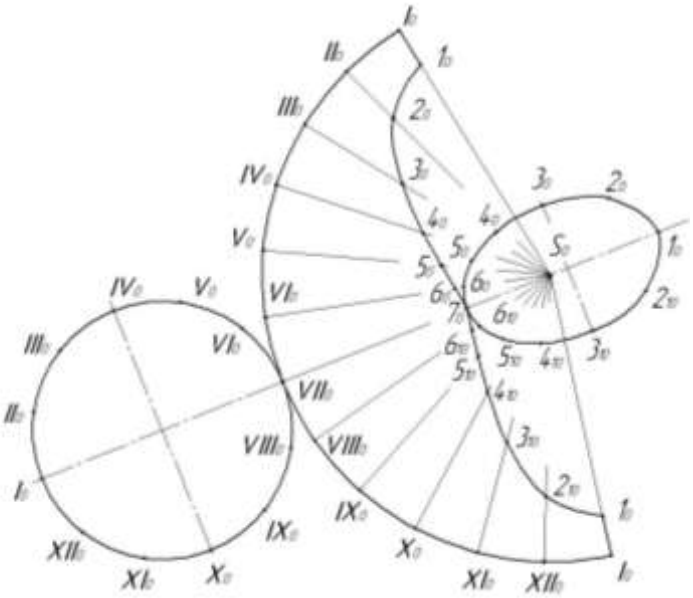

Рис.5.7

5.3. Пересечение поверхностей вращения прямой линией.

5.3.1.Пересечение цилиндрической поверхности прямой линией. На рис. 5.8 представлен прямоугольный круговой цилиндр, пересеченный прямой общего положения *AB*. Горизонтальная проекция кругового цилиндра представляет собою окружность, поэтому горизонтальные проекции всех точек, расположенных на цилиндрической поверхности, в том числе и двух искомых точек пересечения, будут расположены также на этой окружности (точки *M′* и *N′*). По вертикальным линиям

связи находим фронтальные проекции искомых точек *M″* и *N″*. Отрезок *MN*, находящийся внутри цилиндра, невидим.

5.3.2. Пересечение конической поверхности прямой линией. На рис. 5.9 показан один из способов нахождения точек пересечения прямой *AB* с поверхностью прямого кругового конуса. На фронтальной проекции прямой *AB* (*A″B″*) выбирается произвольная точка *K* (*K″*), которая соединяется с вершиной конуса *S* (*S″*) прямой *S″K″*. Известным способом находятся горизонтальные следы точек *F′* и *M′* пересекающихся прямых (*AB* и *SK*) – продолжаются фронтальные проекции *S″K″* и *A″B″* до пересечения с осью *x* в точках *F″* и *M″*, из последних проводятся линии связи до пересечения с горизонтальными проекциями линий (*S′K′* и *A′B′*) в точках *F′* и *M′*. Соединяют точки *F′* и *M′* прямой линией, которая пересечет основание конуса (окружность) в точках *E′* и *D′*. Соединяют точки *E′* и *D′* с вершиной *S′* прямыми линиями, которые пересекут горизонтальную проекцию прямой *A′B′* в точках *1′* и *2′* – искомых горизонтальных проекциях точек входа и выхода прямой линии. По вертикальным линиям проекционной связи находят фронтальные проекции точек *1″* и *2″*. Отрезок прямой *AB*, расположенный между точками *1* и *2*, невидим (находится внутри конуса).

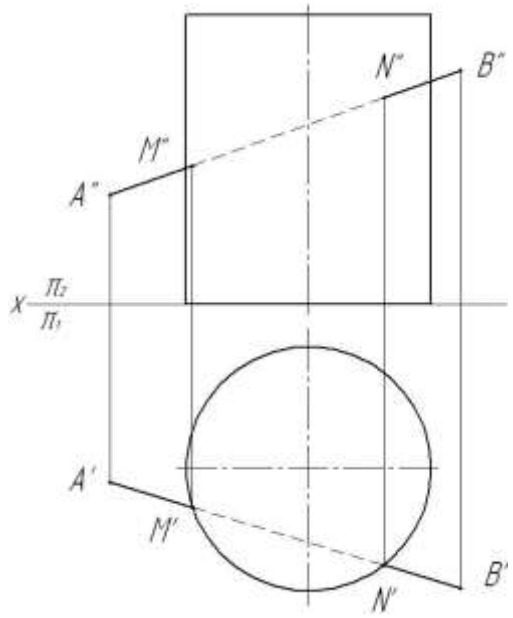

Рис. 5.8

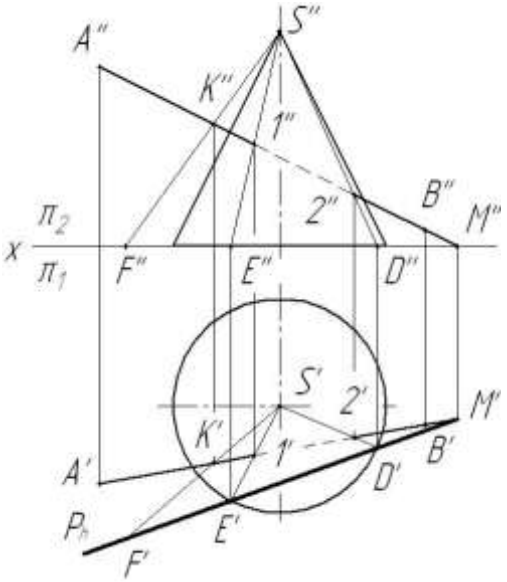

Рис. 5.9

5.3.4. Пересечение сферической поверхности прямой линией. Точки пересечения прямой *AB* с поверхностью сферы (рис. 5.10) найдем, используя фронтально проецирующую плоскость *P*, выраженную следом P_h, проходящую через данную прямую.

Вспомогательная плоскость *P* пересекает сферу по окружности, которая проецируется на плоскость π_1 в виде эллипса, что затрудняет построение. Поэтому в данном случае целесообразно применить, например, способ перемены плоскостей проекций. Новую плоскость проекций выберем так, чтобы вспомогательная плоскость *P* была ей параллельна, т. е. следует провести новую ось проекций x_1 так, чтобы она была параллельна фронтальной проекции *A″B″* прямой *AB* – фронтальному следу P_V, (на рис. 5.10 они совпадают).

Затем строим новую горизонтальную проекцию $A^{IV}B^{IV}$ прямой AB и новую горизонтальную проекцию окружности диаметра, по которому плоскость P пересекает сферу. На пересечении новых горизонтальных проекций прямой и окружности лежат новые горизонтальные проекции двух искомых точек M^{IV} и N^{IV}. Обратным построением определяем фронтальные (M" и N") и горизонтальные (M′ и N′) проекции точек M и N пересечения прямой AB с поверхностью сферы.

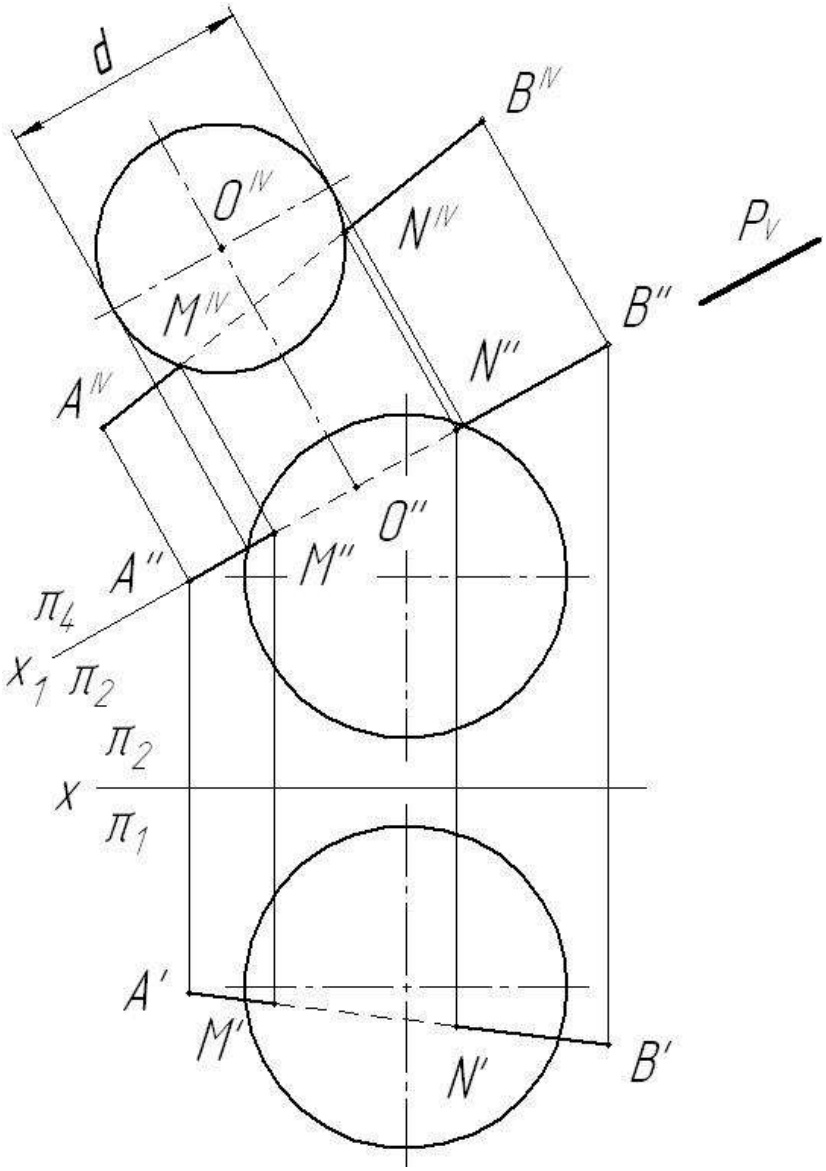

Рис. 5.10