Зависимость коррозионной устойчивости алюминия от толщины Cr-покрытия

Толщина покрытия (***x***), мкм	Объем водорода (***y***), $см^3$
0	65
5	42
10	22
15	12,9
20	11,1
25	0,8
30	0,3
50	0

Результаты параллельных опытов измерения объема водорода

№ эксп. точки	Объем водорода, см^3	
	№ парал. опыта	
	1	2
1	23	23,3
2	44,2	42,3
3	65	64,8
4	80	84,1
5	100,1	102,9

Расчет дисперсии воспроизводимости

Таблица результатов параллельных опытов

столбец - эксперим. точка
строка - номер параллельного опыта

$$Yp := \begin{pmatrix} 23 & 44.2 & 65 & 80 & 100.1 \\ 23.3 & 42.3 & 64.8 & 84.1 & 102.9 \end{pmatrix}$$

$n := 5 \qquad k := 2$

Средние значения в параллельных опытах:

$i := 0..\, n - 1$

$$Ypm_i := \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\left(Yp^{\langle i \rangle}\right)_j}{k} \qquad Ypm = \begin{pmatrix} 23.15 \\ 43.25 \\ 64.9 \\ 82.05 \\ 101.5 \end{pmatrix}$$

$\nu e := n \cdot (k - 1) = 5$

$$S2v := \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} \left[\left(Yp^{\langle i \rangle}\right)_j - Ypm_i\right]^2}{\nu e} = 2.839$$

Расчет коэффициентов линейной модели

$$\hat{y} = a_0 + a_1 x$$

$$Y := \begin{pmatrix} 65 \\ 42 \\ 22 \\ 12.9 \\ 11.1 \\ 0.8 \\ 0.3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Phi := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \\ 1 & 10 \\ 1 & 15 \\ 1 & 20 \\ 1 & 25 \\ 1 & 30 \\ 1 & 50 \end{pmatrix}$$

$$A := \left(\Phi^T \cdot \Phi\right)^{-1} \cdot \Phi^T \cdot Y = \begin{pmatrix} 42.348 \\ -1.191 \end{pmatrix}$$

Проверка адекватности линейной модели

$$y1(x) := A_0 + A_1 \cdot x$$

$n := 8 \qquad m := 1 \qquad p := m + 1$

$$\nu ad := n - p$$

$$Sad := \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \left[Y_i - y1\left[\left(\Phi^{\langle 1 \rangle}\right)_i\right]\right]^2}{\nu ad} = 213.253$$

$$F := \frac{Sad}{S2v} = 75.116$$

$$\alpha := 0.05$$

$$Ft := qF(1 - \alpha, \nu ad, \nu e)$$

$$Ft = 4.95$$

F > Ft, следовательно модель неадекватна

Проверка значимости коэффициентов

Корреляционная матрица

$$C := \left(\Phi^T \cdot \Phi\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.337 & -0.011 \\ -0.011 & 5.644\times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

Критерии Стьюдента для коэффициентов

$$tr := \frac{A}{\sqrt{\mathrm{diag}(C\cdot S2v)}} = \begin{pmatrix} 43.303 \\ -29.766 \end{pmatrix}$$

Табличное значение критерия Стьюдента

$$tt := qt\left(1 - \frac{\alpha}{2}, \nu e\right) = 2.571$$

Поскольку tr по модулю больше tt для всех коэффициентов, то все коэффициенты значимы

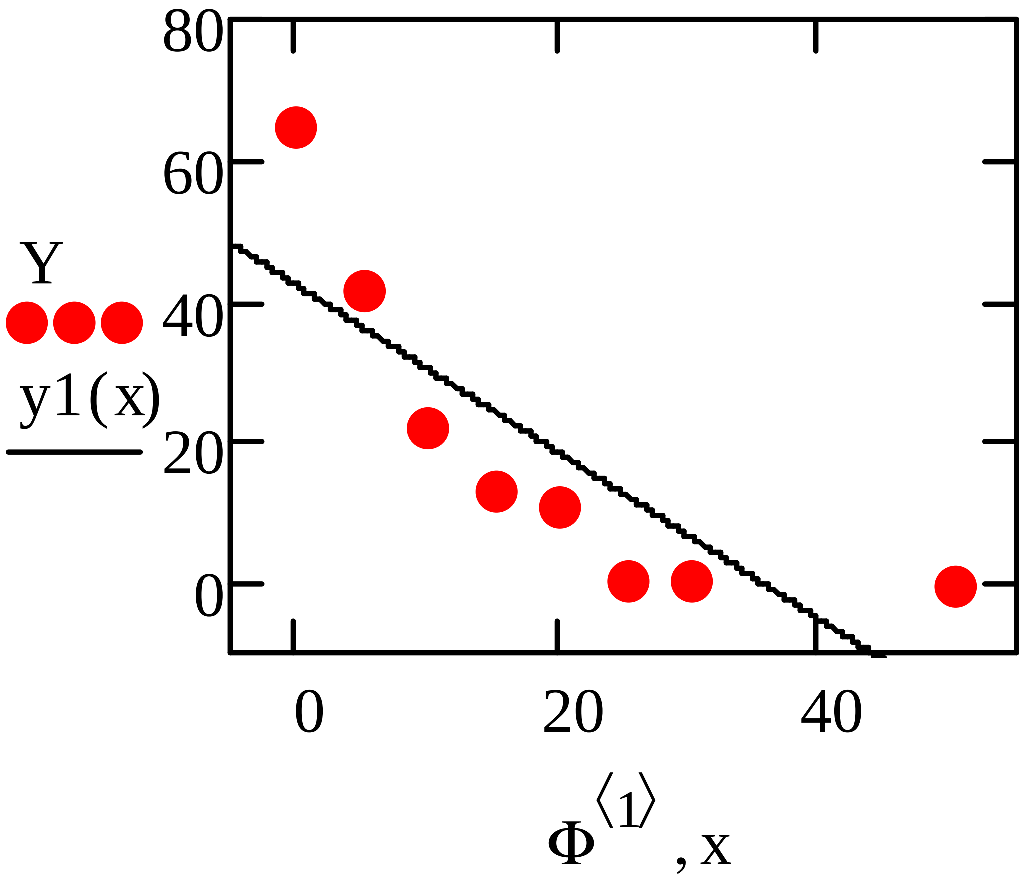
Доверительные интервалы для коэффициентов

$$\Delta := \sqrt{\mathrm{diag}(C \cdot S2v)} \cdot qt\left(1 - \frac{\alpha}{2}, \nu e\right) = \begin{pmatrix} 2.514 \\ 0.103 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 42.348 \\ -1.191 \end{pmatrix}$$

$$A + \Delta = \begin{pmatrix} 44.862 \\ -1.089 \end{pmatrix} \qquad A - \Delta = \begin{pmatrix} 39.834 \\ -1.294 \end{pmatrix}$$

График линейной модели



Расчет коэффициентов полинома 2-го порядка

$$\hat{y} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 10 & 100 \\ 1 & 15 & 225 \\ 1 & 20 & 400 \\ 1 & 25 & 625 \\ 1 & 30 & 900 \\ 1 & 50 & 2.5\times 10^{3} \end{pmatrix}$$

$$a := \left(\Phi^{T}\cdot\Phi\right)^{-1}\cdot\Phi^{T}\cdot Y = \begin{pmatrix} 59.866 \\ -3.59 \\ 0.049 \end{pmatrix}$$

Проверка адекватности полинома 2-го порядка

$$y2(x) := a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$$

$$n := 8 \qquad m := 2 \qquad p := m + 1$$

$$\nu ad := n - p$$

$$Sad := \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \left[Y_i - y2\left[\left(\Phi^{\langle 1 \rangle}\right)_i\right]\right]^2}{\nu ad} = 25.276$$

$$F := \frac{Sad}{S2v} = 8.903$$

$$\alpha := 0.05 \qquad Ft := qF(1 - \alpha, \nu ad, \nu e) = 5.05$$

F > Ft, следовательно модель неадекватна

Проверка значимости коэффициентов

$$C := \left(\Phi^{T} \cdot \Phi\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.603 & -0.047 & 7.37\times 10^{-4} \\ -0.047 & 5.554\times 10^{-3} & -1.009\times 10^{-4} \\ 7.37\times 10^{-4} & -1.009\times 10^{-4} & 2.041\times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

Критерии Стьюдента для коэффициентов

$$tr := \frac{a}{\sqrt{\operatorname{diag}(C \cdot S2v)}} = \begin{pmatrix} 45.755 \\ -28.591 \\ 20.154 \end{pmatrix}$$

Табличное значение критерия Стьюдента

$$tt := qt\left(1 - \frac{\alpha}{2}, \nu e\right) = 2.571$$

Поскольку tr по модулю больше tt для всех коэффициентов, то все коэффициенты значимы

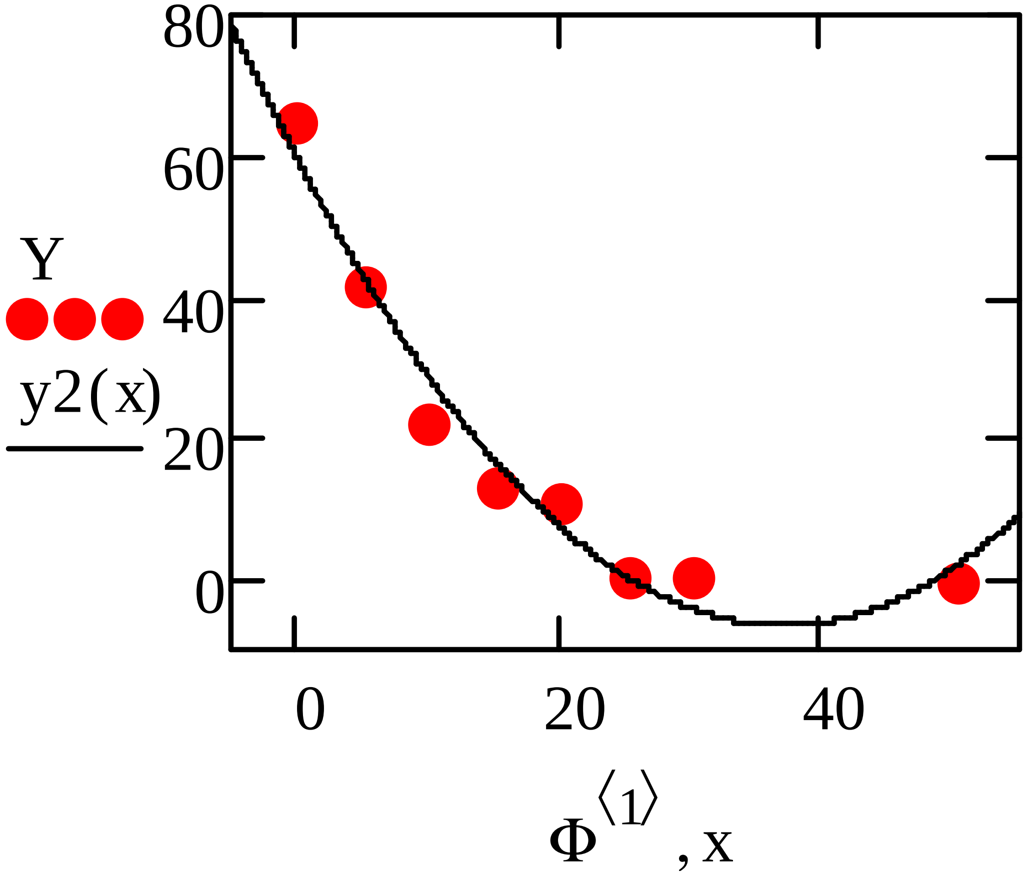
Доверительные интервалы для коэффициентов

$$\Delta := \sqrt{\mathrm{diag}(C \cdot S2v)} \cdot qt\left(1 - \frac{\alpha}{2}, \nu e\right) = \begin{pmatrix} 3.363 \\ 0.323 \\ 6.188 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$a = \begin{pmatrix} 59.866 \\ -3.59 \\ 0.049 \end{pmatrix}$$

$$a + \Delta = \begin{pmatrix} 63.229 \\ -3.267 \\ 0.055 \end{pmatrix} \qquad a - \Delta = \begin{pmatrix} 56.502 \\ -3.913 \\ 0.042 \end{pmatrix}$$

График полинома 2-го порядка



Расчет коэффициентов полинома 3-го порядка

$$\hat{y} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & 10 & 100 & 1\times 10^{3} \\ 1 & 15 & 225 & 3.375\times 10^{3} \\ 1 & 20 & 400 & 8\times 10^{3} \\ 1 & 25 & 625 & 1.563\times 10^{4} \\ 1 & 30 & 900 & 2.7\times 10^{4} \\ 1 & 50 & 2.5\times 10^{3} & 1.25\times 10^{5} \end{pmatrix}$$

$$a := \left(\Phi^{T}\cdot\Phi\right)^{-1}\cdot\Phi^{T}\cdot Y = \begin{pmatrix} 64.522 \\ -5.295 \\ 0.145 \\ -1.305\times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Проверка адекватности полинома 3-го порядка

$$y3(x) := a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3$$

$$n := 8 \qquad m := 3 \qquad p := m + 1$$

$$\nu ad := n - p$$

$$Sad := \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \left[Y_i - y3\left[\left(\Phi^{\langle 1 \rangle} \right)_i \right] \right]^2}{\nu ad} = 8.875$$

$$F := \frac{Sad}{S2v} = 3.126$$

$$\alpha := 0.05 \qquad Ft := qF(1 - \alpha, \nu ad, \nu e) = 5.192$$

F < Ft, следовательно модель адекватна

Проверка значимости коэффициентов

Корреляционная матрица

$$C := \left(\Phi^{T}\cdot\Phi\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.842 & -0.135 & 5.695\times 10^{-3} & -6.685\times 10^{-5} \\ -0.135 & 0.038 & -1.916\times 10^{-3} & 2.448\times 10^{-5} \\ 5.695\times 10^{-3} & -1.916\times 10^{-3} & 1.051\times 10^{-4} & -1.389\times 10^{-6} \\ -6.685\times 10^{-5} & 2.448\times 10^{-5} & -1.389\times 10^{-6} & 1.873\times 10^{-8} \end{pmatrix}$$

Критерии Стьюдента для коэффициентов

$$tr := \frac{a}{\sqrt{\mathrm{diag}(C\cdot S2v)}} = \begin{pmatrix} 41.742 \\ -16.219 \\ 8.412 \\ -5.658 \end{pmatrix}$$

Табличное значение критерия Стьюдента

$$tt := qt\left(1-\frac{\alpha}{2}, \nu e\right) = 2.571$$

Поскольку tr по модулю больше tt для всех коэффициентов, то все коэффициенты значимы

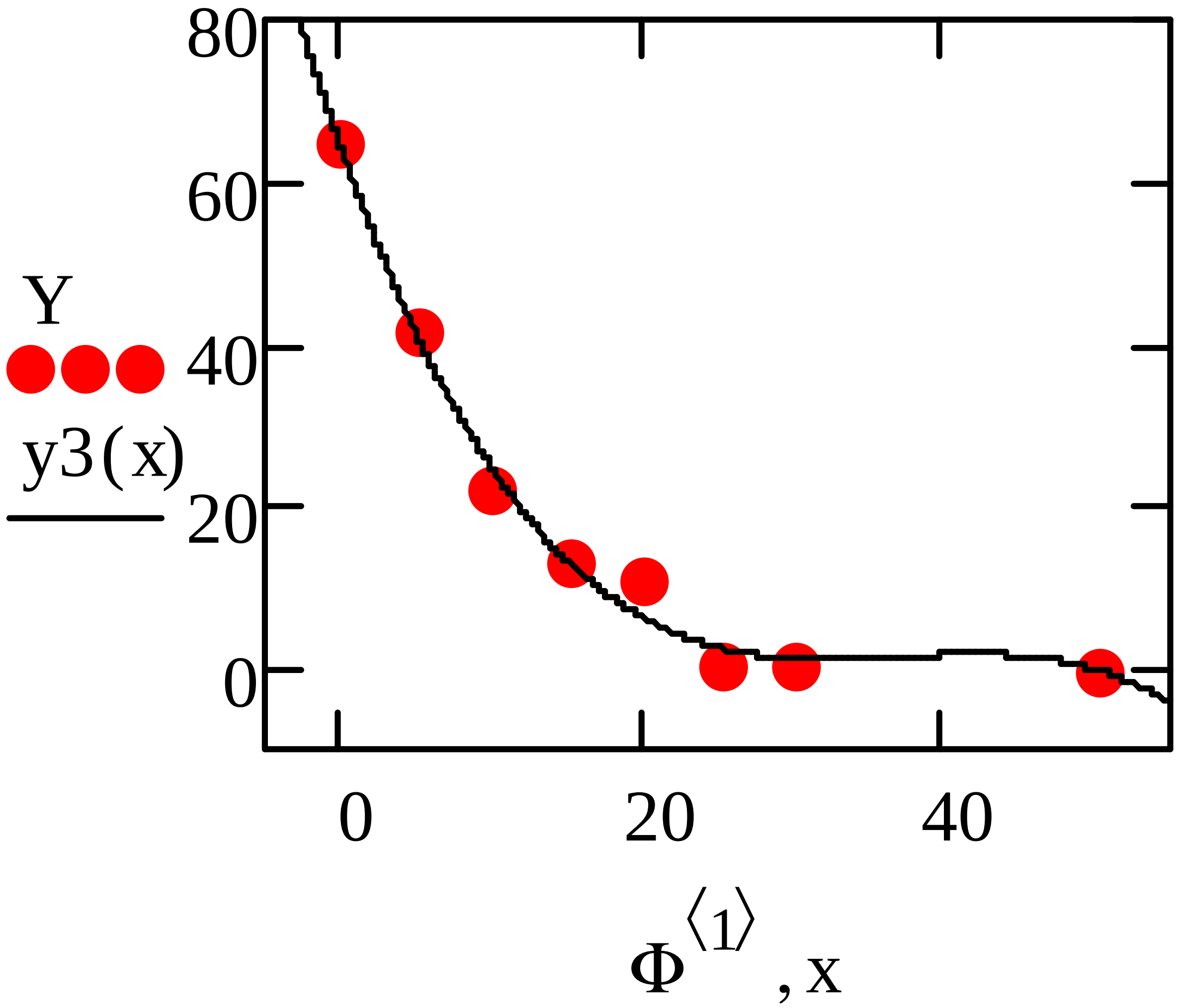
Доверительные интервалы для коэффициентов

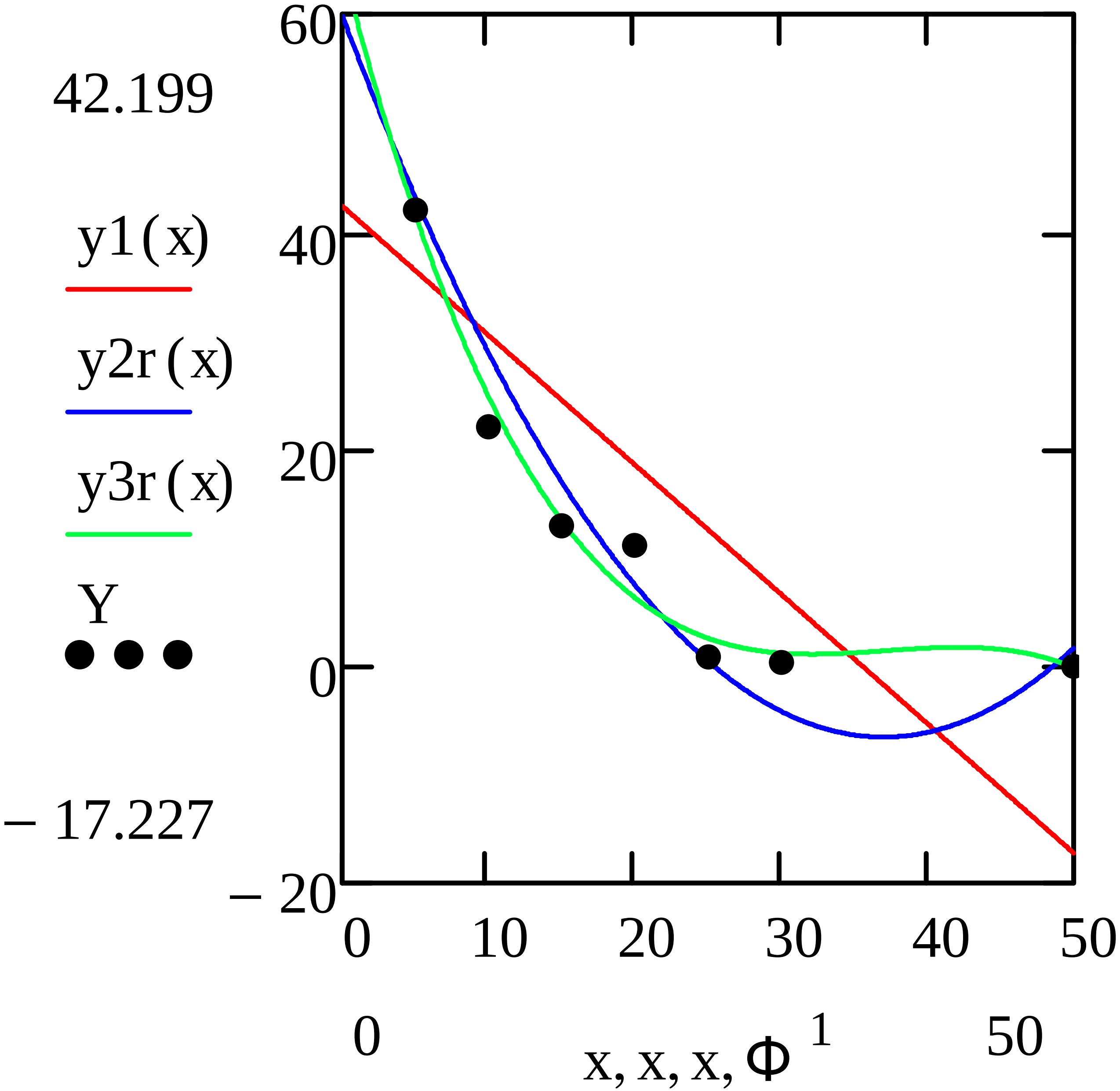
$$\Delta := \sqrt{\mathrm{diag}(C \cdot S2v)} \cdot \mathrm{qt}\left(1 - \frac{\alpha}{2}, \nu e\right) = \begin{pmatrix} 3.973 \\ 0.839 \\ 0.044 \\ 5.927 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$a = \begin{pmatrix} 64.522 \\ -5.295 \\ 0.145 \\ -1.305 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$a + \Delta = \begin{pmatrix} 68.496 \\ -4.456 \\ 0.19 \\ -7.119 \times 10^{-4} \end{pmatrix} \qquad a - \Delta = \begin{pmatrix} 60.549 \\ -6.134 \\ 0.101 \\ -1.897 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

График полинома 3-го порядка





$y1=a_0+a_1x$

$y2=a_0+a_1x+a_2x^2$

$y3=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$